Colles de Maths - semaine 3 - MP*1
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Généralités de topologie

Exercice 1 (*) Soit E un espace vectoriel normé (ou métrique). Soit D une partie dense de E. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue qui admet un prolongement continu à $D \cup \{x\}$ pour tout $x \in E$. Montre que f admet un prolongement continu sur E.

Exercice 2 (*) Soit E un espace vectoriel normé (ou un espace métrique). Soit A et B deux parties non vides disjointes de E. On définit la distance de A à B par

$$d(A, B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x, y).$$

1. On suppose A fermé. A-t-on $d(A, B) > 0$? Et si l'on suppose B fermé ? réduit à un point ?
2. Si A et B sont fermés, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Exercice 3 (*) Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de $||.||_\infty$ et

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C},\ f(0) = f(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 f = 1 \right\}.$$

Montrer que E est fermé mais que la distance de 0 à E n'est pas atteinte.

Applications linéaires continues

Exercice 4 (*) Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire non nulle sur E.

1. A quoi peut-être égal l'adhérence de $\mathrm{Ker}(f)$?
2. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

Exercice 5 (*) On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$, et l'application f définie pour $x \in E$, par

$$f(x) = \int_0^1 x - \int_{-1}^0 x.$$

Montrer que f est linéaire continue et déterminer sa norme subordonnée. Est-elle atteinte, c'est-à-dire existe-t-il $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = |||f|||\ ||a||$?

Exercice 6 (*) On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), ||.||_1)$.

1. Soit $g \in E$. Montrer que l'application $\phi_g : f \in E \mapsto \displaystyle\int_0^1 g(t) f(t)\, dt$ est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme subordonnée.
2. (*Prérequis d'intégration nécessaires*) Qu'en est-il si l'on considère la fonction $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \in L^1(]0, 1])$?

Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 7 (**)

1. Déterminer, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{i\alpha n})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin n)_{n\geq 0}$.

Exercice 8 (*) (*Prérequis de dénombrabilité nécessaires, pas trop dans l'esprit de cette semaine*)
Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.
Pour les meilleurs : Et pour un fermé ?